

Die relativistische Asynchronmaschine - eine Anwendung der Allgemeinen Relativitätstheorie in der Elektrotechnik?

09.09.2010

Tilman Schneider

Rüdesheimer Str. 58, D-53175 Bonn

E-mail: admin@relativistische-asynchronmaschine.de

Abstract. Up to now applications of General Theory of Relativity are known in astrophysics like the redshift or the slow run of resting clocks in a gravitational field. Unusual seems to be an application in electrical engineering. How would an electric machine look like if an engineer designs it based on relativistic electrodynamics instead of electrodynamics with slowly changing fields? In this article the physical model of a relativistic version of the asynchronous motor is presented. It could be used as an instrument to prove the equivalence principle (covariance of Maxwell's equations in general coordinate transformations). With this machine the Coriolis effect based on General Theory of Relativity could be studied and it could theoretically make travel to future possible.

Zusammenfassung. Anwendungen der Allgemeinen Relativitätstheorie sind bisher in der Astrophysik bekannt, wie etwa die Rotverschiebung oder der langsamere Gang von ruhenden Uhren in einem Gravitationsfeld.

Ungewöhnlich erscheint die Möglichkeit einer Anwendung in der Elektrotechnik. Wie würde eine elektrische Maschine aussehen, wenn ein Ingenieur sie auf Grundlage der relativistischen Elektrodynamik konstruiert anstatt mit der Elektrodynamik langsam veränderlicher Felder? In diesem Artikel wird das physikalische Modell einer relativistischen Version des Drehstrom-Asynchronmotors vorgestellt. Er könnte als Instrument zum Nachweis des Äquivalenzprinzips dienen (Kovarianz der Maxwellgleichungen unter allgemeinen Koordinatentransformationen). Mit dieser Maschine ließe sich der Coriolis-Effekt auf Grundlage der Allgemeinen Relativitätstheorie untersuchen und sie könnte theoretisch Reisen in die Zukunft ermöglichen.

PACS numbers: 04.20.-q, 84.40.-x, 84.50.+d

1. Einleitung

Die Allgemeine Relativitätstheorie (ART) ist neben der Quantentheorie zweifellos die wichtigste Grundlage der modernen Physik. Sie basiert auf dem sogenannten Äquivalenzprinzip, das aufgrund der experimentellen Erfahrung auf folgende Weise formuliert werden kann:

- Relativ zu frei fallenden Bezugskörpern gibt es keine Schwerkraft.
- Schwere Masse und träge Masse sind einander gleich.

Daraus ergeben sich einige Folgerungen:

- Die Schwerkraft ist gleichwertig mit der Trägheitskraft.
- Alle Körper fallen gleich schnell.
- Ein mit einem frei fallenden Körper verbundenes Bezugssystem ist ein lokales Inertialsystem (IS).
- Im lokalen IS gelten die physikalischen Gesetze ohne Gravitation auf der Grundlage der Speziellen Relativitätstheorie (SRT).
- Beim Übergang vom lokalen IS in beliebig bewegte Bezugssysteme (mit Hilfe von Koordinatentransformationen) sind die physikalischen Gesetze allgemein in beschleunigten Bezugssystemen oder in Gravitationsfeldern anwendbar.
- In der Technik erzeugte Trägheitskräfte (z.B. die Zentrifugalkraft in einem Motor) können als Kräfte eines künstlichen Gravitationsfeldes angesehen werden.

Von besonderem Interesse soll in diesem Artikel die letzte Folgerung sein. Ist es prinzipiell möglich, mit Hilfe eines „relativistischen“ Motors ein künstliches Gravitationsfeld zu erzeugen? Diese Möglichkeit erscheint nicht ausgeschlossen, zumal in Elektromotoren die Maxwellgleichungen Anwendung finden. Diese werden jedoch bei den gegenwärtigen Maschinen nur in einer unvollständigen Form ausgenutzt. Für eine relativistische Maschine würde man die vollständigen Gleichungen benötigen, da diese in ihrer Natur relativistisch sind und sich dann hinsichtlich der ART für beschleunigte Bezugssysteme formulieren lassen. Man muss also nach einer geeigneten Konstruktion suchen. Ein aussichtsreicher Kandidat könnte die Asynchronmaschine mit Kurzschlussläufer sein. Deshalb wird diese Maschine im Folgenden kurz besprochen.

2. Die Asynchronmaschine

Bei der Asynchronmaschine handelt es sich um eine mit mehrphasigem Wechselstrom betriebene elektrische Maschine, die auf dem Prinzip des rotierenden Magnetfeldes beruht. Hier gelten die Maxwellgleichungen in der Form

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\text{grad}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, & \vec{B} &= \text{rot}\vec{A}, \\ \text{rot}\vec{B} &= \mu_0 \vec{j}.\end{aligned}$$

d.h. bei den hier verwendeten Strömen niedriger Frequenz (z.B. 50 Hz in Europa, 60 Hz in den USA) wird der Verschiebungsstrom vernachlässigt. Es ist $v \ll c$ und die Umfangsgeschwindigkeit des Luftspaltfeldes $\ll c$ (quasistationäres Feld). Liegen die Maxwellgleichungen in dieser Form zu Grunde, so gilt die Galileitransformation

$$\begin{aligned}t &= t', \\ \varphi &= \omega t' + \varphi' .\end{aligned}$$

Diese Maschine kann in drei verschiedenen Betriebszuständen genutzt werden. Diese sind

- Motorbetrieb
- Generatorbetrieb
- Bremsbetrieb

Von Interesse ist hier die Anwendung als Motor.

Die Maschine enthält einen ruhenden Teil (den Stator), der aus einem dickwandigen, rohrförmigen Kern mit geschichteten Blechen besteht. An der Innenwand sind axial verlaufende Nuten eingefräst, in die Leiterstäbe eingelassen sind. Diese werden an den Stirnseiten i. d. R. zu drei Wicklungen verschaltet, die räumlich um einen Winkel von 120° versetzt sind. Diese Wicklungen oder Stränge werden von Wechselströmen durchflossen, die ihrerseits um einen zeitlichen Phasenwinkel von 120° versetzt sind. Der Stator wird auf diese Weise zu einem Elektromagneten, der ein umlaufendes magnetisches Drehfeld ausbildet.

Das Drehfeld durchsetzt einen im Stator drehbar gelagerten Zylinder aus geschichteten Blechen, der den Läufer oder Rotor bildet. Läufer und Ständer sind dabei nur durch einen schmalen Luftspalt getrennt. Das Drehfeld verläuft dort radial. Es setzt sich - bedingt durch das Vorhandensein der Wicklungen - aus einer Grundwelle und unendlich vielen Oberwellen zusammen. Das Betriebsverhalten der Maschine wird im Wesentlichen durch die Grundwelle bestimmt, während sich die Oberwellen störend auswirken. Die Grundwelle hat die Form:

$$B_r(\varphi, t) = m \frac{B_0}{2} \cos(\omega_0 t - p\varphi), \quad m \geq 3, \quad \text{natürliche Zahl.} \quad (2.1)$$

Die Winkelgeschwindigkeit des Feldes wird durch den Quotienten aus Frequenz ω_0 und Polpaarzahl p bestimmt. Für das normale dreiphasige Drehstromsystem ist $m = 3$. Interessant im Hinblick auf die relativistische Maschine ist das durchgeschaltete

vierphasige System mit der Besonderheit, dass dieses sich quasi wie ein zweiphasiges System verhält. Dabei gibt es nur zwei um 90° gegeneinander versetzte Wicklungen, deren Wechselströme um eine zeitliche Phase von 90° verschoben sind.

Auch der Rotor besitzt an seiner Außenwand axiale Nuten, in denen Leiterstäbe liegen. Bei der einfachen Ausführung als Käfig- oder Kurzschlussläufer werden diese an den Stirnseiten durch Kurzschlussringe miteinander verbunden. Durch Induktion fließt in den Leiterstäben ein Strom, wodurch der Läufer zu einem Elektromagneten wird. Infolgedessen wird der Läufer vom Drehfeld des Stators mitgezogen und beschleunigt, bis das abgegebene Drehmoment das Lastmoment ausgleicht. Dann ist die Rotordrehzahl ω konstant und bleibt in jedem Fall kleiner als die Drehzahl des Ständers. Der Schlupf s der Maschine ist *definiert* als [1]

$$s = \frac{\omega'_0}{\omega_0} = 1 - \frac{\omega}{\omega_0}. \quad (2.2)$$

Daher die Bezeichnung „asynchron“. Die Asynchronmaschine erzeugt das Drehmoment [1]

$$\frac{M}{M_{\text{kipp}}} = \frac{2}{\frac{s_{\text{kipp}}}{s} + \frac{s}{s_{\text{kipp}}}} \quad (\text{Kloss'sche Formel}), \quad (2.3)$$

dabei sind M_{kipp} das Kippmoment und s_{kipp} der Kippschlupf.

3. Die Maxwellgleichungen

Die Maxwellgleichungen lauten in vollständiger Form

$$\vec{E} = -\text{grad}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \text{rot}\vec{A}, \quad (3.1a)$$

$$\text{rot}\vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}, \quad \text{div}\vec{E} = \mu_0 \rho. \quad (3.1b)$$

In dieser Form lassen sich die Gleichungen in Inertialsystemen und mit krummlinigen räumlichen Koordinaten anwenden. Um sie auch in beschleunigten Bezugssystemen im Rahmen der ART nutzen zu können ist es üblich, sie mit Hilfe der Tensorschreibweise in invarianter Form zu schreiben. Dann tauchen die physikalischen Größen als 4-komponentige Vektoren (Tensoren 1. Stufe) oder Tensoren 2. Stufe auf. Es ist dabei sinnvoll, dass die Größen E , V , t und ρ die gleiche Maßeinheit wie B , A , x und j erhalten. So wird z. B. die elektrische Feldstärke E wie die magnetische Feldstärke in T gemessen, anstelle von V/m. Das skalare Potential V und das Vektorpotential A werden zu einem elektromagnetischen Potential in Gestalt eines (kontravarianten) 4-Vektors zusammengefasst:

$$(A^\alpha) = (V, A_x, A_y, A_z).$$

Hier wurden als Beispiel kartesische Koordinaten benutzt. Entsprechend gibt es eine Viererstromdichte

$$(j^\alpha) = (\rho, j_x, j_y, j_z),$$

und einen 4-Vektor für Zeit und Raum

$$(x^\alpha) = (t, x, y, z).$$

Die Komponenten kontravarianter Vektoren werden durch hochgestellte Indizes gekennzeichnet. Den kovarianten Vektor erhält man durch Multiplikation mit dem kovarianten metrischen Tensor 2. Stufe $g_{\alpha\beta}$:

$$A_\alpha = g_{\alpha\beta} A^\beta.$$

In der SRT lautet der metrische Tensor (als Matrix geschrieben) in kartesischen Koordinaten:

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

In der ART ist der metrische Tensor i. a. zeit- und ortsabhängig und hat den Charakter eines Gravitations- oder Trägheitspotentials. Er hat die Symmetrieeigenschaft $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$.

Da in der Relativitätstheorie als zusätzliche vierte Dimension die Zeit zur Verfügung steht, ergibt sich eine bemerkenswerte Sichtweise der Maxwellschen Gleichungen: Die elektrische Feldstärke E und die magnetische Feldstärke B , zwei Grundkräfte der Natur, werden jede für sich normalerweise als 3-dimensionale Vektoren dargestellt. In der Maxwellschen Theorie werden durch die Vierdimensionalität beide Felder zu einem einzigen, elektromagnetischen Feld vereinigt:

$$(F_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

In dieser Schreibweise wird deutlich, dass elektrische und magnetische Feldstärke keine wesentlich unterschiedlichen physikalischen Größen sondern vielmehr gleichberechtigt sind. Die Gleichungen (3.1a) und (3.1b) lassen sich jetzt zusammenfassen zu [2, 3]

$$F_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}, \quad (3.2a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\sqrt{g} F^{\alpha\beta}) = \mu_0 \sqrt{g} j^\beta, \quad (3.2b)$$

wobei $g = -\det(g_{\alpha\beta})$ ist. Es ist ferner $F^{\alpha\beta} = g^{\alpha\chi} g^{\beta\delta} F_{\chi\delta}$.

In diesen verallgemeinerten Maxwellgleichungen taucht implizit der metrische Tensor auf. Dies liefert einen Hinweis auf die Möglichkeit eine Maschine zu beschreiben, die mit Hilfe eines elektromagnetischen Feldes eine rotierende Bewegung und damit ein metrisches Feld erzeugt, das seinerseits Zentrifugalkräfte hervorruft. Dieser Sachverhalt ist typisch für Drehfeldmaschinen wie z. B. den Asynchronmotor.

4. Die relativistische Asynchronmaschine

4.1. Anfahrmoment (ruhender Läufer)

Als Ansatz für die Konstruktion der Maschine greifen wir auf ein Bauelement aus der Hochfrequenztechnik zurück, den zylindrischen Hohlraumresonator. Er ist rotationssymmetrisch und in ihm gelten die Maxwellschen Gleichungen in ihrer vollständigen Form. Es soll das hochfrequente, elektromagnetische Feld eines bestimmten Schwingungstyps, des sogenannten TM_{110} -Typs, angeregt werden. Dieser Typ wird durch die Maxwellschen Gleichungen und durch die Randbedingungen festgelegt. Er liegt bei gleicher Resonanzfrequenz in zweifach entarteten Moden vor, d.h. beide Moden lassen sich unabhängig voneinander anregen und überlagern:

Mode 1:

$$\begin{aligned} E_z(r, \varphi, t) &= E_0 J_1(\eta) \cos \varphi \cos \omega_0 t, \\ B_r(r, \varphi, t) &= E_0 \frac{J_1(\eta)}{\eta} \sin \varphi \sin \omega_0 t, \\ B_\varphi(r, \varphi, t) &= E_0 J_1'(\eta) \cos \varphi \sin \omega_0 t. \end{aligned}$$

Mode 2:

$$\begin{aligned} E_z(r, \varphi, t) &= E_0 J_1(\eta) \sin \varphi \cos \omega_0 t, \\ B_r(r, \varphi, t) &= -E_0 \frac{J_1(\eta)}{\eta} \cos \varphi \sin \omega_0 t, \\ B_\varphi(r, \varphi, t) &= E_0 J_1'(\eta) \sin \varphi \sin \omega_0 t. \end{aligned}$$

(J_1 Besselfunktion 1. Ordnung, η normierter Radius). Die Resonanzfrequenz ergibt sich zu

$$\omega_0 = \eta_{11} \frac{c}{R}.$$

(η_{11} 1. Nullstelle der Besselfunktion 1. Ordnung, c Lichtgeschwindigkeit, R Radius des Resonators). Die Feldstrukturen beider Moden sind in sich identisch, gegeneinander aber räumlich um einen Winkel von 90° versetzt. Damit sind wir bei dem weiter oben angesprochenen Fall der zweiphasigen Maschine angelangt. Die Anregung der Moden kann z.B. durch induktive Einkopplung über zwei Koaxialkabel erfolgen, die jeweils an zwei auf dem Zylindermantel um 90° versetzte Bohrungen angelötet sind.

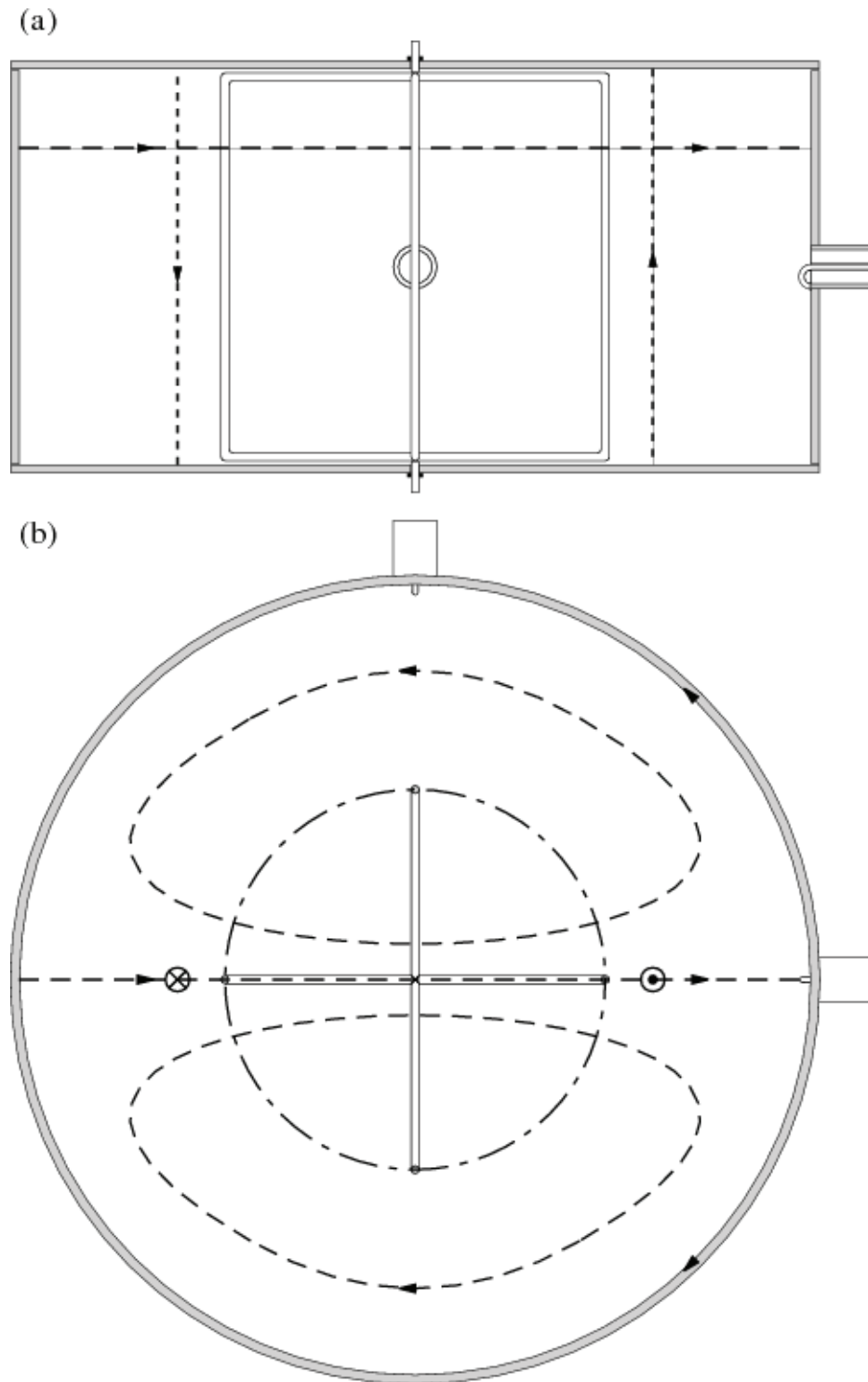


Abbildung 1. Zeichnung der relativistischen Asynchronmaschine (nicht maßstäblich). (a) Aufriss, (b) Grundriss. Zur Verdeutlichung der Feldstruktur sind elektrische ($\cdots\cdots$) und magnetische ($- - -$) Feldlinien eingezeichnet. Auf dem Rand liegende magnetische Feldlinien sind nur mit Pfeilen dargestellt. ($- \cdot -$) Kreis mit Radius η_0 .

Geschieht die Anregung der zweiten Mode nun derart, dass sie eine zeitliche Verzögerung um $T/4$ gegenüber der Anregung der Ersten aufweist, so können beide

Moden zu einem elektromagnetischen Drehfeld überlagert werden:

$$\begin{aligned}
E_z(r, \varphi, t) &= E_0 J_1(\eta) (\cos \varphi \cos \omega_0 t + \sin \varphi \sin \omega_0 t) \\
&= E_0 J_1(\eta) (\cos \omega_0 t - \varphi), \\
B_r(r, \varphi, t) &= E_0 \frac{J_1(\eta)}{\eta} (\sin \varphi \sin \omega_0 t + \cos \varphi \cos \omega_0 t) \\
&= E_0 \frac{J_1(\eta)}{\eta} (\cos \omega_0 t - \varphi), \\
B_\varphi(r, \varphi, t) &= E_0 J_1'(\eta) (\cos \varphi \sin \omega_0 t - \sin \varphi \cos \omega_0 t) \\
&= E_0 J_1'(\eta) (\sin \omega_0 t - \varphi).
\end{aligned}$$

Diese Feldkomponenten resultieren aus dem elektromagnetischen Potential

$$A_z(r, \varphi, t) = -\frac{E_0}{\omega_0} J_1(\eta) (\sin \omega_0 t - \varphi) + \text{Eichterm.} \quad (4.1)$$

das sich als Lösung der Wellengleichung [4]

$$\Delta A_z = \frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2}. \quad (4.2)$$

ergibt. Das Drehfeld rotiert mit einer Drehzahl, die gleich der Resonanzfrequenz der Mode ist ($n_0 = f_0$). Die Struktur des magnetischen Feldes ähnelt dabei derjenigen, die von der konventionellen Asynchronmaschine bekannt ist (Polpaarzahl $p = 1$). Die Führung des Magnetfeldes wird im Gegensatz zur konventionellen Asynchronmaschine nicht durch einen massiven, runden Eisenkern und -mantel, sondern durch die metallenen Innenflächen des zylindrischen Hohlraumresonators bewirkt. Die Feldlinien des elektrischen Feldes stehen senkrecht zum Magnetfeld und verlaufen parallel zur Zylinderachse.

Bei dem Radius $\eta_0 = 1,8412$ verschwindet $J_1'(\eta)$ und wir haben

$$B_r(r_0, \varphi, t) = E_0 \frac{J_1(\eta_0)}{\eta_0} (\cos \omega_0 t - \varphi).$$

Diese Gleichung beschreibt bis auf den Amplitudenwert einen Feldverlauf ähnlich dem des Luftspaltfeldes [Gleichung (2.1) mit $p = 1$]. Im Gegensatz zur herkömmlichen Asynchronmaschine besteht hier das Feld konstruktionsbedingt nur aus einer Grundwelle.

Im Boden und im Deckel des Resonators befinden sich je eine kleine Bohrung. In diesen Bohrungen wird ein Kurzschlussläufer drehbar gelagert. Er besteht aus zwei gleich großen, rechteckigen und in sich geschlossenen Leiterschleifen. Diese sind gegeneinander um 90° gekreuzt angeordnet und miteinander verlötet. Der Läufer hat dann die Gestalt einer Kreuzrahmenantenne (ähnlich denen, wie sie manchmal für Funkpeilungen benutzt werden) und wird vom Drehfeld durchsetzt.

Um ein brauchbares physikalisches Modell entwickeln zu können wollen wir annehmen, dass das Drehfeld vom Läufer nur sehr wenig gestört wird.

Das bei $\eta_0 = 1,8412$ vorhandene elektrische Feld ist eine zur Drehachse parallele Komponente

$$E_z(r_0, \varphi, t) = E_0 J_1(\eta_0) (\cos \omega_0 t - \varphi),$$

wodurch sich ein Spannungsabfall über den zur z -Achse parallelen Leitern des Läufers ergibt. Für diese Leiter gilt aufgrund des Ohmschen Gesetzes und der hohen Frequenzen für die Impedanz [5]:

$$\underline{Z} = R_v + i\omega_0 L \quad \text{mit} \quad R_v = \omega_0 L = \frac{l}{\pi d} \sqrt{\frac{\mu_0 \omega_0}{2\kappa}} \quad (4.3)$$

(l Länge, d Durchmesser und κ Leitfähigkeit des Leiters). Mit steigender Frequenz erhöht sich der Wirkwiderstand, wodurch das von den herkömmlichen Maschinen bekannte Prinzip der Stromverdrängung im Kurzschlussläufer in Erscheinung tritt.

Die in den Leitern fließenden Ströme erzeugen zusammen mit dem Magnetfeld B_r über Lorentzkräfte ein Drehmoment. Infolgedessen wird der Läufer vom Drehfeld mitgezogen und in eine Rotationsbewegung versetzt. Er beschleunigt, wenn das Anfahrmoment

$$M_A = \frac{[lE_0 J_1(\eta_0)]^2}{\omega_0 R_v} \quad (4.4)$$

größer als das Lastmoment ist (wenigstens verursacht durch Reibungsverluste in den Lagern). Durch die Abnahme der Relativgeschwindigkeit zwischen Drehfeld und Läufer wird die Induktion verringert und damit das Drehmoment kleiner, bis es gleich dem Lastmoment ist. Je nach Größe des Lastmomentes stellt sich eine bestimmte konstante Drehzahl ein.

4.2. Drehmoment bei bewegtem Läufer

Für einen stationären Betriebszustand lässt sich für jede Drehzahl das vom Läufer abgegebene Drehmoment berechnen, wenn man die Stärke des elektromagnetischen Feldes vom Läufer aus gesehen kennt. Dazu ist eine geeignete Koordinatentransformation zwischen dem ruhenden Bezugssystem (dem Inertialsystem) und dem rotierenden Bezugssystem erforderlich.

Wir geben zunächst die Tensordarstellungen für das elektromagnetische Feld und das metrische Feld für das ruhende System in Zylinderkoordinaten an:

$$(F_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & E_z \\ 0 & 0 & 0 & B_\varphi \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{r}{R} B_r \\ -E_z & -B_\varphi & \frac{r}{R} B_r & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\frac{r}{R})^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Jetzt wird eine allgemeine Transformation V zwischen ruhendem System S und rotierendem System S' angesetzt:

$$\begin{aligned} t &= lt' + m\varphi', \\ r &= r', \\ \varphi &= nt' + o\varphi', \\ z &= z'. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Die Koordinaten t' und φ' sind jedoch nicht unbedingt als „Zeit“ und „Winkel“ zu interpretieren (*allgemeine* Relativitätstheorie) [3, 6].

In Tensorschreibweise gilt dann für die Transformation V des 4-Ortsvektors $x^\alpha = V^\alpha_\beta x'^\beta$ mit

$$(V^\alpha_\beta) = \begin{pmatrix} l & 0 & m & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ n & 0 & o & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Das elektromagnetische Feld und das metrische Feld transformieren sich dann in folgender Weise:

$$\begin{aligned} F'_{\alpha\beta} &= V^\chi_\alpha V^\delta_\beta F_{\chi\delta}, \\ g'_{\alpha\beta} &= V^\chi_\alpha V^\delta_\beta g_{\chi\delta}. \end{aligned}$$

Die Aufgabe besteht nun darin, die unbekannten Transformationsparameter l , m , n und o zu bestimmen. Dazu legen wir zunächst das elektrodynamische Potential geeignet fest. Wir wählen den Eichterm in Gleichung (4.1) zu Null und fordern, dass sich das Potential $(A_\alpha) = (0, 0, 0, -A_z)$ wie ein Tensor 1. Stufe transformiert:

$$A'_\alpha = V^\beta_\alpha A_\beta, \quad \text{d. h.} \quad A'_z = A_z. \tag{4.8}$$

Für beliebige krummlinige Koordinatensysteme oder Bezugssysteme ergibt sich mit Hilfe der Maxwellgleichungen (3.2a) und (3.2b) die Verallgemeinerung der Wellengleichung (4.2):

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\sqrt{g} g^{\alpha\beta} \frac{\partial A_z}{\partial x^\beta} \right) = 0.$$

Die $g^{\alpha\beta}$ ergeben sich dabei über die Beziehung $g^{\alpha\nu} g_{\nu\beta} = \delta^\alpha_\beta$.

Um den Übergang vom ruhenden in das rotierende Bezugssystem des Rotors zu vollziehen, ersetzen wir in der Wellengleichung die ungestrichenen Größen durch gestrichene. Dann bietet das Lösen der Wellengleichung eine Möglichkeit, die gesuchten Transformationsparameter zu finden. In die Wellengleichung setzen wir die $g'^{\alpha\beta}$ ein, welche die zunächst unbekannten Parameter enthalten. Den Ansatz für das einzusetzende A'_z erhalten wir aus (4.8):

$$A'_z(r, \varphi', t') = -\frac{E'_0}{\omega'_0} J_1(\eta)(\sin \omega'_0 t' - \varphi') = -\frac{E_0}{\omega_0} J_1(\eta)(\sin \omega_0 t - \varphi). \tag{4.9}$$

Dieser Ansatz ist offenbar nur dann möglich, wenn sich zur Lösung der Wellengleichung eine Separation so durchführen lässt, dass in ihr die Besselsche Differentialgleichung 1. Ordnung auftritt. Das bedeutet aber, dass die Transformationsparameter unabhängig von Zeit- und Raumkoordinaten sein müssen. Denn nur dann erhält man durch eine neue Normierung des Radius einerseits und durch einen Koeffizientenvergleich andererseits aus der Besselschen Differentialgleichung zwei Gleichungen zur Bestimmung der Parameter:

$$\eta = \frac{r}{R} \frac{n + o\omega'_0 \frac{R}{c}}{lo - mn}, \quad (4.10a)$$

$$1 = \frac{l + m\omega'_0 \frac{R}{c}}{lo - mn}. \quad (4.10b)$$

Da die 1. Nullstelle der Besselfunktion 1. Ordnung stets konstant ist (η_{11}) ergibt sich mit (4.10a) und (4.10b) ein Zusammenhang zwischen ω_0 und ω'_0 :

$$\omega_0 \frac{R}{c} = \frac{n + o\omega'_0 \frac{R}{c}}{l + m\omega'_0 \frac{R}{c}}. \quad (4.11)$$

Aus (4.9) haben wir die beiden Beziehungen

$$\frac{E'_0}{\omega'_0} = \frac{E_0}{\omega_0}, \quad (4.12a)$$

$$\omega'_0 t' - \varphi' = \omega_0 t - \varphi. \quad (4.12b)$$

Weiterhin müssen wir berücksichtigen, dass sich der Rotor gegenüber dem Stator mit der Winkelgeschwindigkeit ω dreht, vgl. (4.7):

$$\varphi' = \text{const.}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega, \quad \text{d. h.} \quad \omega = \frac{n}{l}, \quad (4.13a)$$

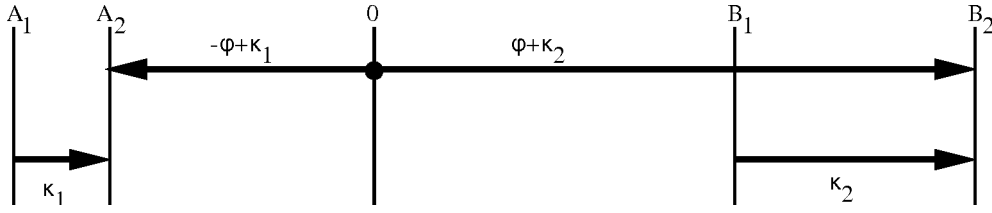
$$\varphi = \text{const.}, \quad \frac{d\varphi'}{dt'} = -\omega, \quad \text{d. h.} \quad l = o. \quad (4.13b)$$

Mit (4.11), (4.13a) und (4.13b) erhalten wir:

$$\frac{\omega'_0}{\omega_0} = \frac{1 - v}{1 - \omega_0 \frac{m}{l}}, \quad (4.14)$$

$$\text{mit } v = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

Die Konstante m/l lässt sich mit einer Zuordnungs-Definition festlegen [7]: Das schwingende Feld mit der Frequenz ω_0 bildet eine stehende Welle, die sich in eine mit dem Uhrzeigersinn drehende Welle (Frequenz ω_0) und eine entgegen dem Uhrzeigersinn drehende Welle (Frequenz ω_0) zerlegen lässt.

**Abbildung 2.** Zur Definition des Schlupfs

Dreht der Läufer sich im Uhrzeigersinn mit der Winkelgeschwindigkeit ω (Abbildung 2), so begegnen sich Läufer und gegenläufiges Drehfeld am Ort A_2 zur Zeit

$$t_1 = \frac{\kappa_1}{\omega} = \frac{-\varphi + \kappa_1}{-\omega_0}.$$

Andererseits überholt das mitlaufende Drehfeld den Läufer am Ort B_2 zur Zeit

$$t_2 = \frac{\kappa_2}{\omega} = \frac{\varphi + \kappa_2}{\omega_0}.$$

Daraus ergeben sich:

$$\kappa_1 = \frac{v}{1+v}\varphi,$$

$$\kappa_2 = \frac{v}{1-v}\varphi.$$

Wir *definieren* den Schlupf

$$s = \frac{t_1}{t_2} \tag{4.15}$$

und erhalten

$$s = \frac{1-v}{1+v} = \frac{\omega_0(1-v)}{\omega_0(1+v)} = \frac{\omega'_0}{\omega_0}. \tag{4.16}$$

Ein Vergleich von (4.16) mit (4.14) ergibt

$$\frac{m}{l} = -\frac{v}{\omega_0}. \tag{4.17}$$

Mit (4.10b), (4.13a), (4.13b), (4.16) und (4.17) erhalten wir die gesuchte Transformation

$$(V^\alpha_\beta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+v} & 0 & -\frac{v}{\eta_{11}(1+v)} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\eta_{11}v}{1+v} & 0 & \frac{1}{1+v} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.18}$$

Gleichung (4.16) lässt sich auch schreiben als

$$1 = \frac{s+v}{1-sv}.$$

Mit $s = \tan \sigma$ und $v = \tan \alpha$ erhalten wir eine „relativistische“ Addition zweier Winkelgeschwindigkeiten:

$$\frac{\pi}{4} = \sigma + \alpha.$$

Der Schlupf s kann auch als Rotverschiebungsfaktor aufgefasst werden, denn die Resonanzfrequenz erscheint dem Beobachter auf dem Rotor rotverschoben. Gemäß (4.12a) gilt auch

$$s = \frac{E'_0}{E_0}.$$

Dies ist ein schon von der herkömmlichen Asynchronmaschine vertrauter Zusammenhang.

Für den Sonderfall, dass die Drehzahl des Rotors sehr viel kleiner als die Resonanzfrequenz des Resonators ist ($v \ll 1$) erhalten wir die Näherungsformel

$$t \approx t' - \frac{v}{\omega_0} \varphi',$$

$$\varphi \approx \omega t' + \varphi'.$$

Die Transformation (4.18) lässt sich anschaulich in einem Raum-Zeit-Diagramm mit den Koordinaten t und φ darstellen (Abbildung 3).

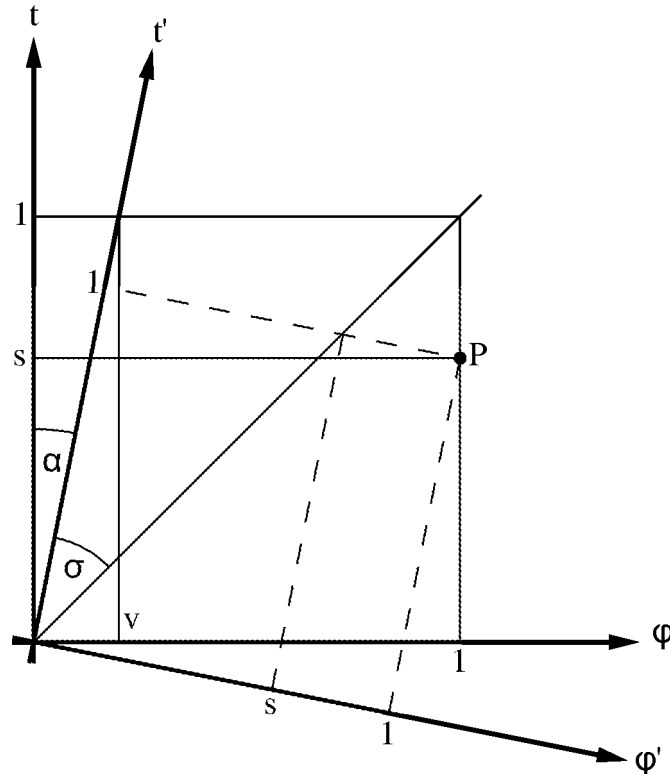


Abbildung 3. Raum-Zeit-Diagramm der Transformation von S in S'.

Werden die Achsen φ , φ' , t und t' normiert, wobei ω_0 in den Normierungen für t und t' mit enthalten ist, dann gilt

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{1+v}t' - \frac{v}{1+v}\varphi', \\ \varphi &= \frac{v}{1+v}t' + \frac{1}{1+v}\varphi'. \end{aligned}$$

Die normierte synchrone Winkelgeschwindigkeit ω_0 wird als Winkelhalbierende im System S dargestellt. Für den Phasenterm (4.12b) gilt $st' - \varphi' = t - \varphi$. Mit $v = \tan \alpha$ ist

$$\begin{aligned} t &= \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha}t' - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha}\varphi', \\ \varphi &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha}t' + \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha}\varphi'. \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass beim Übergang vom ruhenden System S in das rotierende System S' die Raumzeit um den Winkel α gedreht und um den Faktor $(\cos \alpha + \sin \alpha)$ gestaucht wird. Um die Raumzeit (t', φ') geometrisch zu konstruieren, werden zunächst die Koordinatenachsen t und φ gezeichnet. Dann wird der Schlupf s auf der t -Achse abgetragen. Betrachten wir das Ereignis P(s,1) in S, so erhalten wir gemäß Transformation $t' = 1$ und $\varphi' = 1$ in S'. Man beachte, dass die Skalierung der t' -Achse und φ' -Achse kleiner ist. Hier lässt sich jetzt für die normierte Winkelgeschwindigkeit des Drehfeldes der Wert s auf der φ' -Achse ablesen.

Das System S' könnte auch als „virtuelle Raumzeit“ bezeichnet werden. Die Koordinaten t' und φ' sind durch (4.18) eindeutig festgelegt - man kann sie zwar „sehen“ (mit Hilfe mathematischer Berechnungen), aber nicht direkt messen (ähnlich wie bei einem Spiegelbild, das man nur sehen, aber nicht als reelles Bild auffangen und ausmessen kann). Sie sind auch wie oben erwähnt nicht mehr als „Zeit“ und „Winkel“ anzusehen. Messbar ist und somit eine physikalische Bedeutung hat hingegen das durch die metrische Fundamentalform gegebene Raumzeitintervall

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g'_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu. \quad (4.19)$$

Für den Beobachter auf dem Rotor gilt $d\varphi' = 0$. Dann folgt daraus ein Zusammenhang zwischen der Eigenzeit des Beobachters auf dem Rotor und der Zeit eines im Inertialsystem (d.h. neben dem Stator) ruhenden Beobachters:

$$d\tau = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega r}{c}\right)^2} dt. \quad (4.20)$$

Nun können wir auch die gesuchten Felder im System S' angeben:

$$(F'_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & sE_z \\ 0 & 0 & 0 & B_\varphi \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{r}{R}B_r \\ -sE_z & -B_\varphi & \frac{r}{R}B_r & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.21)$$

$$(g'_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} g'_{00} & 0 & g'_{02} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ g'_{20} & 0 & g'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (4.22)$$

mit

$$\begin{aligned} g'_{00} &= \frac{1 - (v\eta)^2}{(1 + v)^2} \\ g'_{02} &= g'_{20} = -\frac{v(1 + \eta^2)}{\eta_{11}(1 + v)^2} \\ g'_{22} &= \frac{v^2 - \eta^2}{\eta_{11}^2(1 + v)^2} \end{aligned}$$

Für den Fall des stillstehenden Rotors ($v = 0$) reduzieren sich diese Komponenten der Metrik wieder auf die in (4.6).

Den gesuchten Zusammenhang zwischen Drehmoment und Drehzahl im Inertialsystem erhalten wir mit Hilfe des elektromagnetischen Feldes (4.21) zu

$$M = M_A \sqrt{1 - v^2}. \quad (4.23)$$

Dabei haben wir noch das modifizierte Ohmsche Gesetz

$$j'_z = \frac{\kappa E'_z}{\sqrt{g'_{00}(r_0)}}$$

verwendet. Für sehr große Läuferdrehzahlen verliert (4.23) seine Gültigkeit, weil dann (4.3) nicht mehr erfüllt ist. Sollte sich die Maschine dem Zusammenhang (4.23) entsprechend verhalten, so wäre ein weiterer Beweis für die Gültigkeit des Äquivalenzprinzips und damit der ART erbracht.

Um zu sehen, ob das berechnete Ergebnis für das Trägheitspotential (4.22) plausibel ist, sollen in den folgenden Kapiteln die Zentrifugalkraft, die Tangentialgeschwindigkeit und der Coriolis-Effekt behandelt werden.

5. Zentrifugalkraft und Tangentialgeschwindigkeit

Jetzt kann die Zentrifugalkraft berechnet werden, die auf den rotierenden Läufer einwirkt. Diese erscheint einem Beobachter (Masse m), der sich auf dem Läufer befindet, wie eine radial nach außen weisende Gravitationskraft. In der ART werden diese Kräfte mit Hilfe der Christoffelsymbole beschrieben:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\kappa} = \frac{g^{\kappa\lambda}}{2} \left(\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^{\lambda}} \right). \quad (5.1)$$

Diese Symbole sind das „Analogon“ hinsichtlich der Gleichungen (3.2a) in der Elektrodynamik. Von allen Symbolen kommt für die Zentrifugalkraft nur die Radialkomponente Γ_{00}^1 in Frage. Zusätzlich benötigen wir noch die 4-Geschwindigkeit u' des Beobachters auf dem Rotor. Ausgehend von der metrischen Fundamentalform (4.19) gilt

$$(u'^{\mu}) = \left(\frac{c}{\sqrt{g'_{00}}}, 0, 0, 0 \right).$$

Mit den Bewegungsgleichungen

$$\frac{du^\kappa}{d\tau} = -\Gamma_{\mu\nu}^\kappa u^\mu u^\nu$$

folgt dann für die Zentrifugalkraft

$$K_r = mb_r = -m\Gamma_{00}^1 (u^0)^2 = m\gamma^2 \omega^2 r, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega r}{c}\right)^2}}.$$

Für $\omega r \ll c$ erhalten wir den bekannten Ausdruck aus der klassischen Mechanik.

Für die 4-Geschwindigkeit des Beobachters vom ruhenden System aus gesehen gilt

$$u^\nu = V^\nu_\mu u'^\mu = (u_t, u_r, \frac{R}{r} u_\varphi, u_z) = \gamma(c, 0, \omega R, 0).$$

Ein Körper, der sich vom rotierenden Läufer löst, wird sich also tangential entlang einer Geraden mit der konstanten 4-Geschwindigkeit

$$\begin{aligned} u_t &= \gamma c, \\ u_\varphi &= \gamma \omega r \end{aligned}$$

bewegen, was im Einklang mit der SRT steht.

6. Coriolis-Effekt

Zur Diskussion des Coriolis-Effektes werden die Bewegungsgleichungen aufgestellt. Die dafür benötigten Christoffelsymbole lauten mit (5.1):

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^0 &= \Gamma_{10}^0 = \frac{v^2}{1+v^2} \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{12}^0 &= \Gamma_{21}^0 = \frac{v}{1+v^2} \frac{1}{\eta_{11} r}, \\ \Gamma_{00}^1 &= -\frac{1}{(1+v)^2} \frac{\omega^2}{c^2} r, \\ \Gamma_{02}^1 &= \Gamma_{20}^1 = -\frac{1}{(1+v)^2} \frac{\omega r}{c R}, \\ \Gamma_{22}^1 &= -\frac{1}{(1+v)^2} \frac{r}{R^2}, \\ \Gamma_{01}^2 &= \Gamma_{10}^2 = \frac{v}{1+v^2} \eta_{11} \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{1+v^2} \frac{1}{r}. \end{aligned}$$

Alle anderen $\Gamma_{\mu\nu}^\kappa$ verschwinden. Ist $\omega = 0$ (Läuferstillstand), so verbleiben für den Fall der Polarkoordinaten [2]:

$$\begin{aligned} \Gamma_{22}^1 &= -\frac{r}{R^2}, \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}. \end{aligned}$$

Damit ergeben sich die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}
 \frac{du'^0}{d\tau} &= -2\Gamma_{01}^0 u'^0 u'^1 - 2\Gamma_{12}^0 u'^1 u'^2, \\
 \frac{du'^1}{d\tau} &= -\Gamma_{00}^1 (u'^0)^2 - 2\Gamma_{02}^1 u'^0 u'^2 - \Gamma_{22}^1 (u'^2)^2 \\
 \frac{du'^2}{d\tau} &= -2\Gamma_{01}^2 u'^0 u'^1 - 2\Gamma_{12}^2 u'^1 u'^2, \\
 \frac{du'^3}{d\tau} &= 0.
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

Ferner gilt für einen Massenkörper ($ds > 0$) die Nebenbedingung

$$c^2 = g'_{00}(u'^0)^2 + g'_{11}(u'^1)^2 + 2g'_{02}u'^0 u'^2 + g'_{22}(u'^2)^2 + g'_{33}(u'^3)^2. \tag{6.2}$$

Wir betrachten einen Körper, der sich vom Zentrum mit einer konstanten Geschwindigkeit v_r entfernt. Im Ruhesystem S bewegt sich der Körper dann im freien Fall entlang einer Geraden (Radius), die eine Geodäte darstellt. Es gilt für die 4-Geschwindigkeit

$$u^\nu = \gamma(c, v_r, 0, 0), \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_r}{c}\right)^2}}.$$

Im rotierenden System S' muss dann wegen $u^\nu = V^\nu_\mu u'^\mu$ gelten:

$$u'^\mu = \gamma(kc, v_r, -k\omega R, 0), \quad k = \frac{1 + v}{1 + v^2}$$

Die Integration $x'^\mu = \int u'^\mu d\tau$ ergibt

$$x'^\mu = \gamma(kc, v_r, -k\omega R, 0)\tau.$$

Da bei einer affinen Transformation Geodäten wieder in Geodäten übergehen [7], muss die Bahnkurve in S' ebenfalls eine Geodäte sein, wie man durch Einsetzen in (6.1) und (6.2) nachprüfen kann. Die Elimination von τ ergibt

$$r = -\frac{v_r}{k\omega R}\varphi'. \tag{6.3}$$

Interpretiert man φ' als Winkel, dann ist die Geodäte eine *Archimedische Spirale*. Ist $v \ll 1$, dann ist $k \approx 1$ und man erhält den klassischen Fall.

Um die Bahnkurve eines masselosen Photons ($ds = 0$) zu bestimmen, muss in (6.1) ein anderer Parameter (λ statt τ) gewählt werden. Außerdem gilt jetzt die Nebenbedingung

$$0 = g'_{00}(u'^0)^2 + g'_{11}(u'^1)^2 + 2g'_{02}u'^0 u'^2 + g'_{22}(u'^2)^2 + g'_{33}(u'^3)^2.$$

Als 4-Geschwindigkeit in S setzen wir an:

$$u^\nu = (c, c, 0, 0).$$

Im rotierenden System S' ist dann

$$u'^\mu = (kc, c, -k\omega R, 0).$$

Die Integration $x'^\mu = \int u'^\mu d\lambda$ ergibt

$$x'^\mu = (kc, c, -k\omega R, 0)\lambda.$$

Analog zu (6.3) erhalten wir

$$r = -\frac{c}{k\omega R}\varphi'. \quad (6.4)$$

Ein von der Drehachse radial nach außen verlaufender Teilchenstrahl würde etwa entgegen der Drehbewegung gekrümmt werden, ähnlich dem Wasserstrahl bei einem rotierendem Rasensprenger. Insbesondere beschreibt (6.4) eine *Lichtablenkung*.

7. Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Artikel wurde ein physikalisches Modell vorgestellt, mit dem eine Asynchronmaschine so konstruiert werden kann, dass die Maxwell'schen Gleichungen in ihrer kovarianten Form (Berücksichtigung allgemeiner Koordinatentransformationen) gültig sind. Dabei werden die zur Beschreibung des Betriebsverhaltens notwendigen Größen wie das elektromagnetische Feld und das metrische Feld auf Grundlage der ART in das Bezugssystem des Läufers umgerechnet. Die dazu erforderliche Koordinatentransformation ergibt sich aus einer Symmetriebetrachtung des elektromagnetischen Potentials, geometrischen Neben- und Randbedingungen sowie einer Zuordnungs-Definition.

Ein Vergleich dieser relativistischen Asynchronmaschine (RASM) mit der „klassischen“ Asynchronmaschine (ASM) macht die Unterschiede deutlich, die sich als Konsequenz ergeben:

- Bei der RASM gibt es im Gegensatz zur ASM keinen Eisenkern. Sie hat daher ein geringeres Gewicht.
- Das Drehfeld der RASM hat keine Oberwellen (wie die ASM), sondern nur eine Grundwelle (*ideale Maschine*).
- Es gibt unterschiedliche Drehmoment-Drehzahl-Kennlinien (kein Kippmoment bei der RASM).
- Die RASM ist eine zweiphasige, die ASM eine dreiphasige Maschine.
- Bei der ASM kann die Drehzahl (Netzfrequenz) des Ständerdrehfeldes verändert werden (üblicherweise durch einen Umrichter). Bei der RASM ist diese Drehzahl (Resonanzfrequenz) durch die Geometrie (Radius des Resonators) festgelegt.
- Die Definition des Schlupfs ist bei beiden Maschinentypen verschieden.
- Aufgrund der hohen Resonanzfrequenz lassen sich mit der RASM sehr hohe Läuferdrehzahlen erzielen. Diese werden durch die Festigkeit des Läufers begrenzt (große Zentrifugalkraft).
- Wegen der hohen Resonanzfrequenz ist das Anfahrmoment der RASM extrem klein.

Problematisch ist der letzte Punkt. Die RASM kann nur laufen wenn es gelingt, die Differenz von Anfahrmoment zu Lastmoment möglichst groß zu machen. Das ist vor allem deswegen eine technologische Herausforderung, weil die Lager völlig reibungsfrei sein müssen damit das Lastmoment so klein wie möglich wird. Außerdem wird der Läufer durch die induzierten, hochfrequenten Ströme thermisch stark beansprucht.

Sollte die RASM tatsächlich im Experiment funktionieren, wäre dies ein weiterer Beweis für die Gültigkeit der ART. Außerdem könnte untersucht werden, ob eine vom Coriolis-Effekt bewirkte Teilchenstrahl- oder Lichtablenkung stattfindet, welche sich quantitativ geringfügig vom klassischen Fall unterscheidet.

Ein Experiment lässt sich wahrscheinlich schon in absehbarer Zeit durchführen: Die RASM und auch die ASM stellen Zeitmaschinen dar. Man stelle sich ein Karussell vor, das von einer solchen Maschine angetrieben wird. Ein Passagier, der eine bestimmte Zeit im Karussell gefahren ist, wird nach dem Anhalten feststellen, dass er gemäß (4.20) weniger gealtert ist als Personen, die neben dem Karussell stehen. Für das Experiment kann als Karussell eine sogenannte Humanzentrifuge dienen, die von einem Drehstrommotor angetrieben wird. Diese Zentrifugen werden normalerweise von Astronauten zu Trainingszwecken benutzt. Zu Beginn des Experiments werden zwei baugleiche Atomuhren synchronisiert. Atomuhren der neuesten Generation können Zeitunterschiede bis in den Bereich von Femtosekunden (10^{-15} s) auflösen. Eine der beiden Uhren lässt man in der Zentrifuge für einige Stunden als Passagier kreisen und vergleicht nach dem Anhalten beide Uhren miteinander. Man wird feststellen, dass die bewegte Uhr um einige Femtosekunden gegenüber der Ruhenden nachgeht.

Literatur

- [1] SEINSCH, Hans Otto: *Grundlagen elektrischer Maschinen und Antriebe*. 3. Aufl. Stuttgart : Teubner, 1993, S. 126, 142.
- [2] FLIESSBACH, Torsten: *Allgemeine Relativitätstheorie*. 2. Aufl. Heidelberg : Spektrum Akademischer Verlag, 1995, S. 101, 134.
- [3] WEYL, Hermann: *Raum, Zeit, Materie*. 7. Aufl. Berlin : Springer, 1988, S. 223, 227.
- [4] LEHNER, Günther: *Elektromagnetische Feldtheorie*. Berlin : Springer, 1990, S. 452.
- [5] ZINKE, Otto; BRUNSWIG, Heinrich: *Lehrbuch der Hochfrequenztechnik*. Band 1 3. Aufl. Berlin : Springer, 1986, S. 83-84.
- [6] EINSTEIN, Albert: *Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie*. 23. Aufl. Braunschweig : Vieweg, 1988, S. 62.
- [7] GARBE, Annette: *Die partiell konventional, partiell empirisch bestimmte Realität physikalischer RaumZeiten*. Würzburg : Königshausen & Neumann, 2001, S. 111, 340.